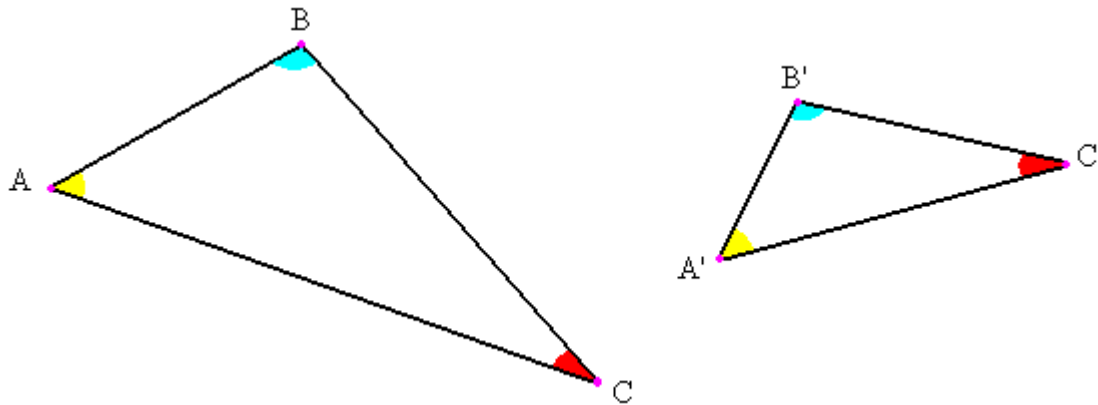


Taller básico de Geometría (18/12/20):

Resultados básicos de Geometría plana: se suponen conocidos las semejanzas de triángulos y el teorema de Tales:

Dos triángulos son semejantes si tienen los ángulos correspondientes iguales (AAA) o si sus lados son proporcionales entre sí (LLL).

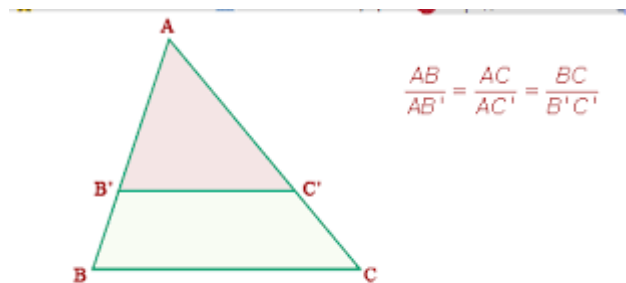


Criterios de semejanza:

LAL: son semejantes dos triángulos que tienen dos lados proporcionales y el mismo ángulo en común.

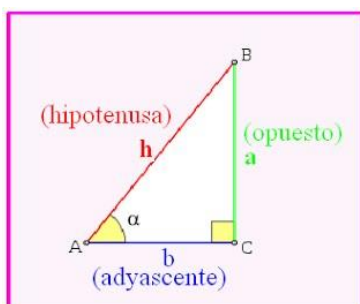
ALA: son semejantes dos triángulos que tienen dos ángulos iguales y el lado en común proporcionales.

El teorema de Tales afirma que si en un triángulo se traza una línea paralela a cualquiera de sus lados, se obtiene un triángulo que es semejante al triángulo dado.



Trigonometría básica: definiciones de seno, coseno y tangente de un ángulo. Propiedades básicas

El triángulo ABC es un triángulo rectángulo en C; lo usaremos para definir las razones seno, coseno y tangente, del ángulo correspondiente al vértice A:



El seno (abreviado como *sen*, o *sin* por llamarse "sínus" en latín) es la razón entre el cateto opuesto al ángulo y la hipotenusa.

El coseno (abreviado como *cos*) es la razón entre el cateto adyacente o contiguo al ángulo y la hipotenusa.

La tangente (abreviado como *tan* o *tg*) es la razón entre el cateto opuesto al ángulo y el cateto adyacente.

$$\sin A = \frac{a}{h}, \quad \cos A = \frac{b}{h}, \quad \tan A = \frac{a}{b}$$

Del teorema de Pitágoras se obtiene que $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$, $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Razones trigonométricas de $90^\circ, 120^\circ, 135^\circ, 150^\circ, \dots$

Así: las funciones para 60° son:

Sen $60^\circ =$ _____

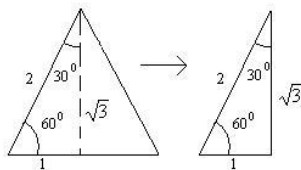
Cos $60^\circ =$ _____

Tan $60^\circ =$ _____

Cot $60^\circ =$ _____

Sec $60^\circ =$ _____

Csc $60^\circ =$ _____



* Las funciones de 30°

$$\text{sen} 30^\circ = \frac{1}{2}$$

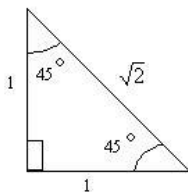
$$\text{cos} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tan} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{cot} 30^\circ = \sqrt{3}$$

$$\text{sec} 30^\circ = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3}$$

$$\text{csc} 30^\circ = 2$$



$$\text{sen} 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

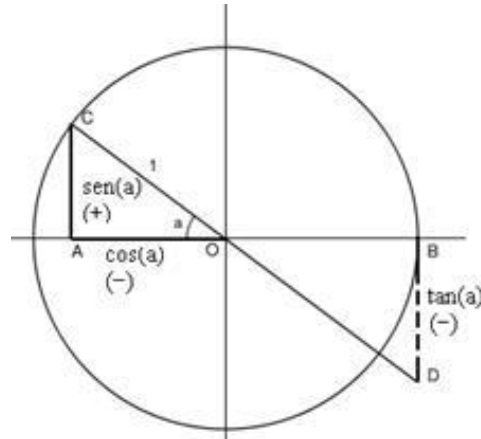
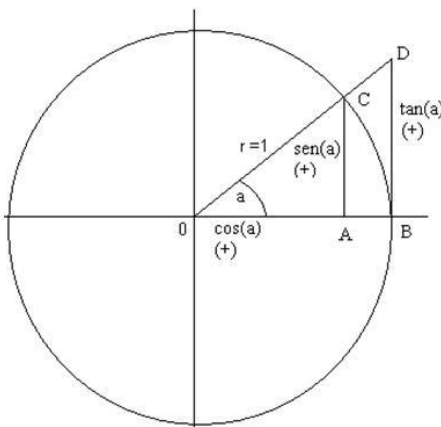
$$\text{cos} 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

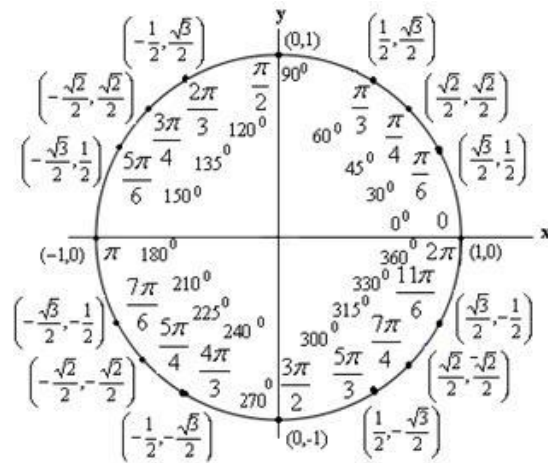
$$\text{tan} 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$$

$$\text{cot} 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$$

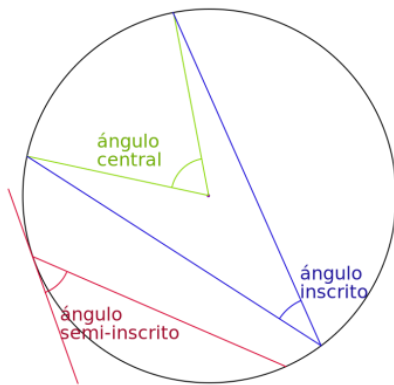
$$\text{sec} 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

$$\text{csc} 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$



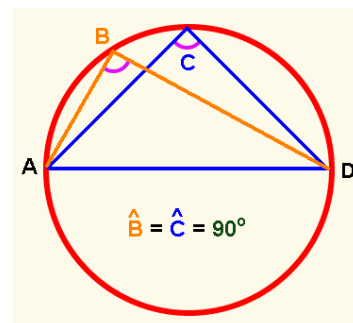
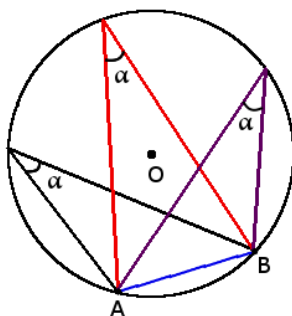


Teorema del ángulo inscrito (o semi-inscrito).- *Un ángulo inscrito (o semi-inscrito) en un círculo mide la mitad del arco que abarca (o ángulo central).*



Demostración: Hacer primero el caso particular de que uno de los lados pase por el centro de la circunferencia.

En consecuencia, todos los ángulos inscritos o semi-inscritos que comparten un mismo arco tienen la misma medida. El caso en que el arco que describe un ángulo inscrito es una semicircunferencia, corresponde al ángulo recto.



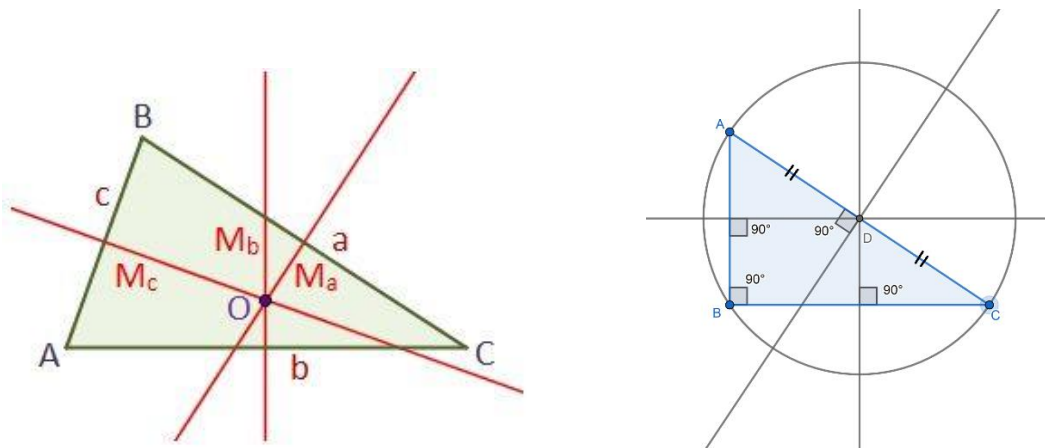
Teorema del ángulo interior. *Un ángulo interior en un círculo mide la semisuma de los dos arcos que abarca.*

Teorema del ángulo exterior. *Un ángulo exterior de un círculo mide la semidiferencia de los dos arcos que abarca.*

Casos de ángulos tangentes.

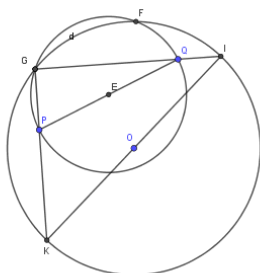
Mediatriz de un triángulo. Es la mediatriz de cada uno de los lados (segmentos), es decir el lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos vértices.

Existencia del circuncentro. El punto O de corte de dos mediatrices es un punto que equidista de los tres vértices. La circunferencia que tiene O como centro y que pasa por un vértice pasa también por los otros vértices y se llama la circunferencia circunscrita y O circuncentro del triángulo.



Caso del triángulo rectángulo. En un triángulo rectángulo el circuncentro es el punto medio de la hipotenusa, que coincide con un diámetro de su circunferencia circunscrita.

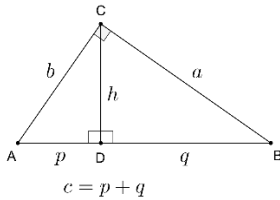
Problema Fase Local OME 2008 (nº 5). Dada una circunferencia y dos puntos P y Q en su interior, inscribir un triángulo rectángulo cuyos catetos pasen por P y Q respectivamente. ¿Para qué posiciones de P y Q el problema no tiene solución?



Sea E es el punto medio de PQ , y C' la circunferencia de centro E y radio $PQ/2$. Sea G es un punto de corte de la circunferencia dada C y C' . Entonces GP y GQ son los catetos del triángulo rectángulo buscado. Si O el centro de la circunferencia C y r su radio, no existe solución si $OE + PQ/2 < r$.

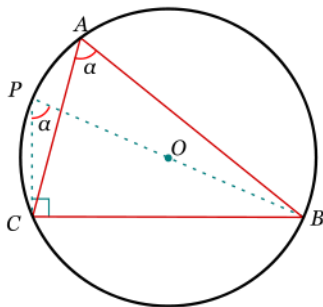
Teorema de la altura. En un triángulo rectángulo la altura sobre la hipotenusa es media proporcional con las partes en las que divide a ésta.

Demostración por semejanza de triángulos. Los triángulos ACD y CBD son semejantes por igualdad de ángulos. Por tanto $AD/CD = CD/BD$



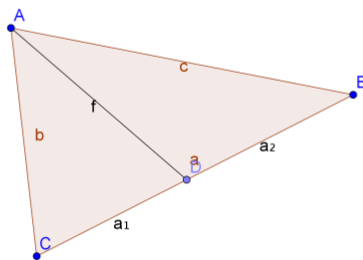
Teorema del Seno. En todo triángulo ABC se verifica que los lados son proporcionales a los senos de los ángulos correspondientes. La proporción es el diámetro de la circunferencia circunscrita: $\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C} = 2R$

Demostración comparando la definición de seno de dos de los ángulos, o bien, por el teorema del ángulo inscrito, el ángulo en P coincide con el ángulo en A



Teorema de la bisectriz (interior). La bisectriz de un ángulo de un triángulo divide al lado opuesto en dos segmentos proporcionales a los lados del ángulo:

$$\frac{a_1}{b} = \frac{a_2}{c}$$

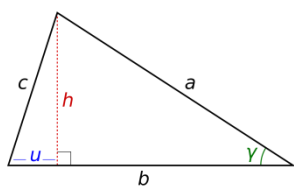


Demostración: aplicar el teorema del seno a los triángulos ADC , ADB y ABC :

$$\frac{a_1}{\sin \frac{A}{2}} = \frac{f}{\sin C} ; \frac{a_2}{\sin \frac{A}{2}} = \frac{f}{\sin B} ; \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Teorema del Coseno. En todo triángulo ABC de lados a, b, c se verifica que:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$$

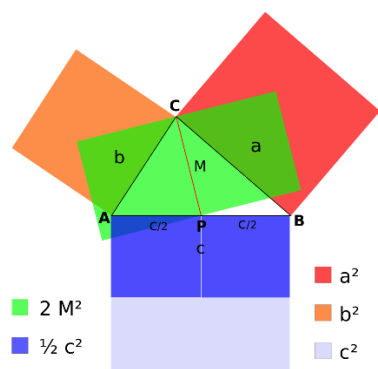


Demostración: aplicar el teorema de Pitágoras y la definición de coseno de C:

$$c^2 = u^2 + h^2 = u^2 + a^2 - (b - u)^2 = a^2 + b^2 - 2b(b - u) = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$$

Teorema de la mediana (o de Apolonio). En un triángulo ABC de lados a, b, c se traza la mediana desde C, de longitud M. Se verifica que:

$$a^2 + b^2 = \frac{1}{2}c^2 + 2M^2$$



Demostración: Aplicar la fórmula del coseno a los ángulos que forma la mediana con el lado c.

Movimientos del plano. Homotecias.

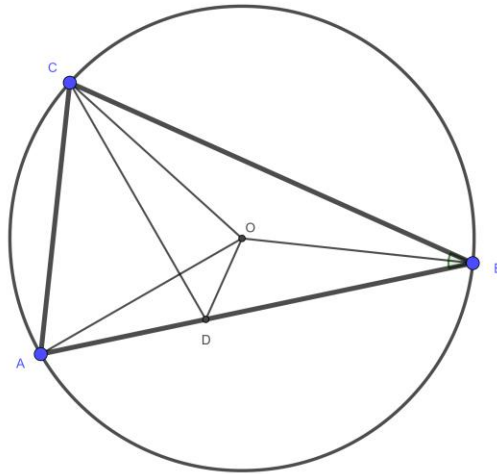
Recordar los tipos de movimientos: traslaciones, giros, simetrías y simetrías con deslizamiento, con sus elementos característicos. Recordar las homotecias, centro y razón.

Bisectrices (interiores) de un triángulo. Son las rectas que dividen el ángulo interior en dos ángulos iguales. La simetría de eje una bisectriz del triángulo transforma un lado en el otro.

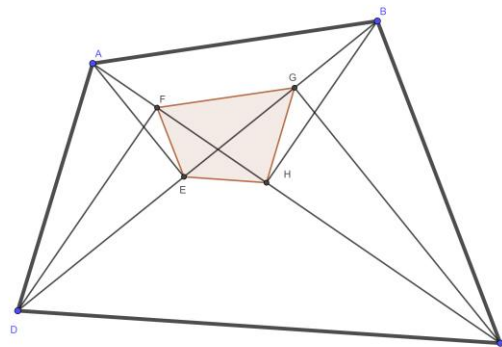
Existencia del incentro. Todo punto de la bisectriz equidista de los dos lados que la definen. El punto de corte de dos bisectrices equidista de los tres lados, luego está en la tercera bisectriz.

Problema n° 3 Fase local 2006. En el triángulo ABC se traza la bisectriz interior CD. Se sabe que el centro del círculo inscrito en el triángulo BCD coincide con el centro del círculo circunscrito del triángulo ABC. Calcular los ángulos del triángulo ABC.

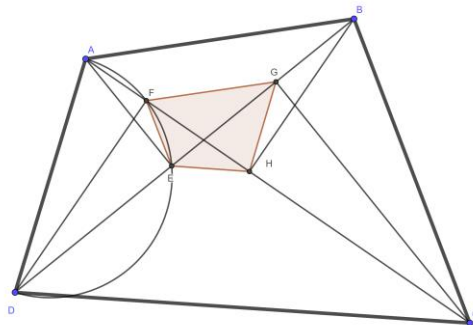
Si el ángulo OBC mide a, también OBD es a, por ser OB la bisectriz. Por ser O el circuncentro, OCB y OAB son a; por ser OC una bisectriz, también OCD es a. Luego DCB es 2a; por CD una bisectriz, ACD es también 2^a. OCA es 3a; por ser O circuncentro, OAC también es 3^a. En suma, los ángulos del triángulo ABC miden 2a, 4a y 4a. Como la suma es 180° se concluye que los ángulos son 36°, 72° y 72°.



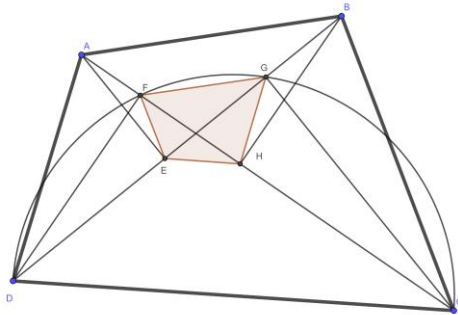
Problema n° 2 Fase Local OME 2008. *En un cuadrilátero convexo se trazan las perpendiculares desde cada vértice a la diagonal que no pasa por él. Demuestra que los cuatro puntos de intersección de cada perpendicular con su correspondiente diagonal forman un cuadrilátero semejante al dado.*



Los puntos AFED están sobre una semicircunferencia de diámetro AD, porque la circunferencia circunscrita a los triángulos AFD y AED es la misma. Lo mismo sucede con los cuadriláteros AEHB, BGHC y CHED. Fijándonos en AFED, observamos que el ángulo inscrito ADB es el suplementario del AFE (en general, en un cuadrilátero inscrito en una circunferencia, los ángulos opuestos son suplementarios), pero AFE es suplementario de EFH, luego $\text{ADB} = \text{EFH}$.

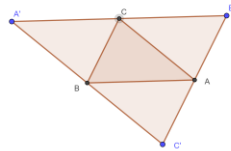


Usando el cuadrilátero CHED, por el teorema del ángulo inscrito, se tiene la igualdad de ángulos $\angle BDC = \angle GFH$. Sumando $\angle ADC = \angle ADB + \angle BDC = \angle EFH + \angle GFH = \angle EFG$, y similarmente se hace con los restantes ángulos del cuadrilátero.



Alturas de un triángulo. Son las rectas perpendiculares a un lado trazadas desde el vértice opuesto.

Existencia del ortocentro. Para demostrar que las tres alturas de un triángulo ABC son concurrentes en un punto, se trazan paralelas a los lados pasando por los vértices. Se construye así un nuevo triángulo $A'B'C'$



Como $ABCB'$, $ABA'C$, $CBC'A$, $CBAB'$, $ACBC'$ son paralelogramos, sus lados son iguales, luego A,B,C son los puntos medios de los lados de $A'B'C'$. Por tanto, las alturas de ABC son las mediatrices de $A'B'C'$ que se cortan en un punto, que se llama ortocentro de ABC.

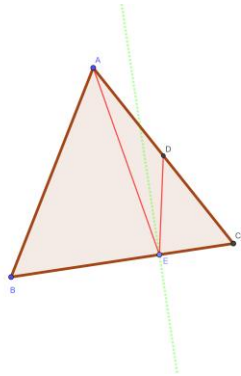
Existencia del baricentro. Se puede demostrar (usando propiedades de homotecias o de vectores) que las tres medianas de un triángulo se cortan en un punto, llamado baricentro, o centro de gravedad del triángulo.

Recta de Euler. Siguiendo con el razonamiento anterior se puede probar que el ortocentro, circuncentro y baricentro de un triángulo están alineados, la recta común se llama recta de Euler.

Fórmulas del área S de un triángulo, conocidos:

1. Base, b , y altura h : $S = \frac{1}{2} bh$
2. Dos lados a, b y el ángulo \hat{C} que abarcan: $S = \frac{1}{2} ab \sin \hat{C}$

Problema Fase Local OME 2019 (n° 3) (ligeramente adaptado). Sea ABC un triángulo equilátero de lado 6. Un rayo de luz parte de A , rebota en el lado BC , en el punto E , y corta al lado AC en su punto medio D . Calcular el área del triángulo ADE



El criterio de semejanza ALA nos permite afirmar que los triángulos ABE y DCE son semejantes, y la razón de semejanza es $\frac{1}{2}$, ya que el ángulo en E de ambos triángulos es el mismo por la propiedad de reflexión de la luz; el ángulo en B del primero y en C del segundo es 60° , y $AB=2DC$. Por tanto el área del primero es 4 veces el área del segundo, y $BE=2EC$. Por tanto $EC=2$, $BE=4$, $CD=3$. Si aplicamos la fórmula 2 del área, tenemos que el área de los triángulos ABC , ABE y DCE es, respectivamente, $9\sqrt{3}$, $6\sqrt{3}$, $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. El cálculo restante ya es trivial.

3. Lados a, b, c (fórmula de Herón). Si $p=(a+b+c)/2$, y R es el circunradio:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{abc}{4R}$$

4. Semiperímetro e inradio r : $S=pr$

Problema Fase Local OME 2019 (n° 4) (ligeramente adaptado). Sea $p \geq 3$ un número entero y consideremos el triángulo rectángulo de cateto mayor p^2-1 y cateto menor $2p$. Inscribimos en el triángulo un semicírculo cuyo diámetro se apoya en el cateto mayor y es tangente a la hipotenusa. Calcule el radio r del semicírculo, en función de p . Determine los valores de p para los que r es también entero.

5. Coordenadas de los vértices (a_1, a_2) , (b_1, b_2) , (c_1, c_2) ,

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 1 & b_1 & b_2 \\ 1 & c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$